Der Ursprung der Superformel

$$\frac{1}{r} = \sqrt[n_1]{\left|\frac{1}{a}\cos\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_2} + \left|\frac{1}{b}\sin\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_3}}$$

Die ***Superformel*** ist erst vor wenigen Jahren (1997) von dem belgischen Biotechnologen **Johan Gielis** *entdeckt* worden.

Auf der Suche nach einer mathematischen Funktion, mit deren Hilfe sich biologische Formen besonders gut modellieren lassen, hat Gielis die ***Superellipse*** von **Gabriel Lamé** (1795-1870) verallgemeinert.

Es gelang Gielis die *2D-Superformel* für den Umriß auch auf den dreidimensionalen Raum zu erweitern: die ***3D-Superformel*** für die Form (äußere Gestalt) von Körpern.

Ob *Super Shape, Superformel* oder *Superellipse* - wissenschaftlich begründen kann man die einzelnen Bestandteile der Formeln (bisher) nicht.

Mit etwas Kenntnis von **Koordinatensystemen** kann man die allerdings sehr bedeutsamen Ideen von Lamé und Gielis nachvollziehen.

Der Kreis

Für jeden Punkt $P(x;y)$ eines **Kreises** gilt seit der Antike (**Pythagoras**):

$$x^2 + y^2 = r_0^2 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{x^2+y^2} = r_0 = \text{konst.} \quad (r_0\text{: Radius})$$

Der Kreis läßt sich aber ebenso gut als Funktion des Winkels ϕ zur x-Achse beschreiben (**Polarkoordinaten**):

$$r(\phi) = r_0 = \text{konst.} \quad (r\text{: Abstand zum Koordinatenursprung})$$

Beide Beschreibungen haben die gleiche Bedeutung: Alle Punkte, die zu einem Kreis gehören, besitzen den gleichen Abstand r_0 vom Ursprung.

Wie sehen diese unterschiedlichen Beschreibungsmöglichkeiten für den verallgemeinerten Kreis, also die Ellipse, aus?

Die Ellipse

Der Übergang vom Kreis zur Ellipse ist im **kartesischen Koordinatensystem** recht überschaubar:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (a, b\text{: Halbachsen})$$

Die Darstellung in **Polarkoordinaten** mutet einem dagegen schon mehr zu:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \left(\frac{f}{a}\right)^2 \cos^2\phi}$$

In dieser Formel sind a und b wiederum die Halbachsen, f ist der Abstand der Brennpunkte und r ist der Abstand vom Koordinatenursprung.

Eine Umformung dieser Gleichung führt auf:

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{f}{ab}\cos\phi\right)^2$$

Bevor Sie die Verallgemeinerung der Ellipsengleichung zur Superellipse und zur Superformel verfolgen, sehen Sie sich die Ellipsengleichung bitte noch einmal ganz genau an. Die Ähnlichkeit zur *Superformel* ist doch schon sichtbar geworden, oder nicht? Benennen Sie die Parameter um und *Gielis liegt schon in der Luft...*

Die Superellipse

Der Unterschied zur eigentlichen Ellipse besteht darin, dass die **Exponenten** der beiden Terme nicht mehr den Wert 2 besitzen, sondern jede positive reelle Zahl annehmen können (Gabriel Lamé, 1795-1870):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a, b\text{: Halbachsen; } n > 0)$$

Eine weitere Verallgemeinerung geschieht dadurch, dass zwei verschiedene Exponenten zugelassen werden:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^m + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1 \quad (a, b\text{: Halbachsen; } m, n > 0)$$

Super Shape - die Superformel

Die Entdeckung von Gielis bestand darin, dass **weitere Verallgemeinerungen** möglich sind, ohne dass die Gleichung ihre Eigenschaft verliert, geschlossene Kurven (Umrisse und Formen) zu beschreiben. Diese Verallgemeinerungen betreffen:

- den dritten Exponenten: $r^2 \to r^{n_1}$
- das Argument der Winkelfunktion: $\cos(\phi) \to \cos(m\phi/4)$.

$$\frac{1}{r^{n_1}} = \left|\frac{1}{a}\cos\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_2} + \left|\frac{1}{b}\sin\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_3}$$

Die Einführung des Parameters m in die Winkelfunktion erlaubt sogar die Anwendung der Formel für Formen höherer Symmetrie (Trigon, Pentagon, Hexagon etc.).

Eine besonders kompakte Formulierung liegt in der bekannten Formel vor:

$$\frac{1}{r} = \sqrt[n_1]{\left|\frac{1}{a}\cos\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_2} + \left|\frac{1}{b}\sin\left(\frac{m}{4}\phi\right)\right|^{n_3}}$$

mit r: Abstand vom Koordinatenursprung, $a, b > 0$ und $m, n_1, n_2, n_3 \geq 0$.

H. Hoffmann, Berlin 2004